Chapitre II
Théorie de la crédibilité

Olivier Wintenberger

ISUP 2, Université Paris VI
(slides Olivier Lopez)

Année universitaire 2013-2014

Outline

Principe de base

- Exemple : on considère une activité répartie sur m pays.
- L'expérience du risque X sur certains pays j est faible.
- En revanche, on possède une bonne expérience de ce risque au niveau mondial.
- Deux positions extrêmes :
  - Même tarif pour tout le monde ($\bar{X}$ en tarification pure)
  - Pour le pays j : $\bar{X}_j$, moyenne sur l'historique du pays j.
- Théorie de la crédibilité : compromis entre les deux approches.

Principe de base

- Exemple : on considère une activité répartie sur m pays.
- L'expérience du risque X sur certains pays j est faible.
- En revanche, on possède une bonne expérience de ce risque au niveau mondial.
- Deux positions extrêmes :
  - Même tarif pour tout le monde ($\bar{X}$ en tarification pure)
  - Pour le pays j : $\bar{X}_j$, moyenne sur l'historique du pays j.
- Théorie de la crédibilité : compromis entre les deux approches.

Principe de base

- Exemple : on considère une activité répartie sur m pays.
- L'expérience du risque X sur certains pays j est faible.
- En revanche, on possède une bonne expérience de ce risque au niveau mondial.
- Deux positions extrêmes :
  - Même tarif pour tout le monde ($\bar{X}$ en tarification pure)
  - Pour le pays j : $\bar{X}_j$, moyenne sur l'historique du pays j.
- Théorie de la crédibilité : compromis entre les deux approches.

Principe de base

- Exemple : on considère une activité répartie sur m pays.
- L'expérience du risque X sur certains pays j est faible.
- En revanche, on possède une bonne expérience de ce risque au niveau mondial.
- Deux positions extrêmes :
  - Même tarif pour tout le monde ($\bar{X}$ en tarification pure)
  - Pour le pays j : $\bar{X}_j$, moyenne sur l'historique du pays j.
- Théorie de la crédibilité : compromis entre les deux approches.

Principe de base

- Exemple : on considère une activité répartie sur m pays.
- L'expérience du risque X sur certains pays j est faible.
- En revanche, on possède une bonne expérience de ce risque au niveau mondial.
- Deux positions extrêmes :
  - Même tarif pour tout le monde ($\bar{X}$ en tarification pure)
  - Pour le pays j : $\bar{X}_j$, moyenne sur l'historique du pays j.
- Théorie de la crédibilité : compromis entre les deux approches.

Outline

Mise en évidence de l'hétérogénéité

- On considère X_{jt} = coût pour l'assureur pour le pays j, lors de l'année t.
- $j = 1, ..., J$, et $t = 1, ..., T_j$.
- Question : Les différents pays sont-ils homogènes du point de vue du coût moyen ?
- Une solution pour tester ce genre de choses : ANOVA.

Mise en évidence de l'hétérogénéité

- On considère $X_{jt} =$ coût pour l'assureur pour le pays j, lors de l'année t.
- $j = 1, ..., J$, et $t = 1, ..., T_j$.
- Question : Les différents pays sont-ils homogènes du point de vue du coût moyen ?
- Une solution pour tester ce genre de choses : ANOVA.

Mise en évidence de l'hétérogénéité

- On considère $X_{jt} =$ coût pour l'assureur pour le pays j, lors de l'année t.
- $j = 1, ..., J$, et $t = 1, ..., T_j$.
- Question : Les différents pays sont-ils homogènes du point de vue du coût moyen ?
- Une solution pour tester ce genre de choses : ANOVA.

Présentation rapide de l'ANOVA 1/4

- On considère des variables X_{jt} avec $E[X_{jt}] = m_j$, deux à deux indépendantes.
- On teste

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad m_1 = \dots = m_j = \dots = m_J, \\ H_1 &: \quad \exists (j,k) : \; m_j \neq m_k. \end{aligned}$$

- On note

$$\begin{aligned} \bar{X}_{j.} &= \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} X_{jt}, \\ \bar{X} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{J} T_j} \sum_{j,t} X_{jt}. \end{aligned}$$

Présentation rapide de l'ANOVA 2/4

- Somme des carrés inter-classes :

$$SSB = \sum_{j=1}^{J} T_j(\bar{X}_{j.} - \bar{X})^2.$$

- Somme des carrés intra-classe :

$$SSW = \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T_j} (X_{jt} - \bar{X}_{j.})^2.$$

- Statistique de test :

$$F = \frac{\frac{SSB}{J-1}}{\frac{SSW}{T-p}},$$

où $T = \sum_{j=1}^{J} T_j$.

Présentation rapide de l'ANOVA 3/4

- Somme des carrés inter-classes :

$$SSB = \sum_{j=1}^{J} T_j(\bar{X}_{j.} - \bar{X})^2.$$

- Somme des carrés intra-classe :

$$SSW = \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T_j} (X_{jt} - \bar{X}_{j.})^2.$$

- Statistique de test :

$$F = \frac{\frac{SSB}{J-1}}{\frac{SSW}{T-J}},$$

où $T = \sum_{j=1}^{J} T_j$.

Présentation rapide de l'ANOVA 4/4

- Sous H_0, on s'attend à ce que F soit petit.
- Forme du test :
  - Si $F > s_\alpha$, on rejette H_0, on conclut à une différence significative.
  - Si $F < s_\alpha$, on ne rejette pas H_0.
- Rappel : s_α doit satisfaire $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(F > s_\alpha) = \alpha$.
- s_α se calcule en faisant une hypothèse sur la loi des X_{jt}.

Présentation rapide de l'ANOVA 4/4

- Sous H_0, on s'attend à ce que F soit petit.
- Forme du test :
  - Si $F > s_\alpha$, on rejette H_0, on conclut à une différence significative.
  - Si $F < s_\alpha$, on ne rejette pas H_0.
- Rappel : s_α doit satisfaire $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(F > s_\alpha) = \alpha$.
- s_α se calcule en faisant une hypothèse sur la loi des X_{jt}.

Présentation rapide de l'ANOVA 4/4

- Sous H_0, on s'attend à ce que F soit petit.
- Forme du test :
  - Si $F > s_\alpha$, on rejette H_0, on conclut à une différence significative.
  - Si $F < s_\alpha$, on ne rejette pas H_0.
- Rappel : s_α doit satisfaire $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(F > s_\alpha) = \alpha$.
- s_α se calcule en faisant une hypothèse sur la loi des X_{jt}.

Présentation rapide de l'ANOVA 4/4

- Sous H_0, on s'attend à ce que F soit petit.
- Forme du test :
  - Si $F > s_\alpha$, on rejette H_0, on conclut à une différence significative.
  - Si $F < s_\alpha$, on ne rejette pas H_0.
- Rappel : s_α doit satisfaire $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(F > s_\alpha) = \alpha$.
- s_α se calcule en faisant une hypothèse sur la loi des X_{jt}.

Loi de la statistique de test

Loi de la statistique de test

On suppose que $X_{jt} \sim \mathcal{N}(m_j, \sigma^2)$ (on rappelle qu'on avait supposé l'indépendance). Sous l'hypothèse H_0,

$$F \sim \mathcal{F}(J-1, T-J),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la loi de Fisher.

- Si les lois des X_{jt} ne sont plus gaussiennes, la loi de F n'est une Fisher que de façon asymptotique.
- Attention, les X_{jt} doivent avoir la même variance.

Loi de la statistique de test

Loi de la statistique de test

On suppose que $X_{jt} \sim \mathcal{N}(m_j, \sigma^2)$ (on rappelle qu'on avait supposé l'indépendance). Sous l'hypothèse H_0,

$$F \sim \mathcal{F}(J-1, T-J),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la loi de Fisher.

- Si les lois des X_{jt} ne sont plus gaussiennes, la loi de F n'est une Fisher que de façon asymptotique.
- Attention, les X_{jt} doivent avoir la même variance.

Loi de la statistique de test

Loi de la statistique de test

On suppose que $X_{jt} \sim \mathcal{N}(m_j, \sigma^2)$ (on rappelle qu'on avait supposé l'indépendance). Sous l'hypothèse H_0,

$$F \sim \mathcal{F}(J-1, T-J),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la loi de Fisher.

- Si les lois des X_{jt} ne sont plus gaussiennes, la loi de F n'est une Fisher que de façon asymptotique.
- Attention, les X_{jt} doivent avoir la même variance.

Outline

Hypothèses générales

- j = numéro de la police (ou de la classe de risque), T_j = longueur de l'historique pour la classe j.

Hypothèses

1. Les classes j sont indépendantes.
2. A chaque classe j est associé un facteur de risque (non observable) θ_j. On suppose les θ_j i.i.d.
3. Conditionnellement à θ_j, les X_{jt}, $t = 1, ..., T_j$ sont i.i.d. de loi $F(\cdot|\theta_j)$.

- Exemple déjà vu : $\theta_j \sim \Gamma(r, s)$ et $F(\cdot|\theta_j)$ désigne la loi de Poisson de paramètre θ_j.

Hypothèses générales

- $j =$ numéro de la police (ou de la classe de risque), $T_j =$ longueur de l'historique pour la classe j.

Hypothèses

1. Les classes j sont indépendantes.
2. A chaque classe j est associé un facteur de risque (non observable) θ_j. On suppose les θ_j i.i.d.
3. Conditionnellement à θ_j, les X_{jt}, $t = 1, ..., T_j$ sont i.i.d. de loi $F(\cdot|\theta_j)$.

- Exemple déjà vu : $\theta_j \sim \Gamma(r, s)$ et $F(\cdot|\theta_j)$ désigne la loi de Poisson de paramètre θ_j.

Prime de risque, prime collective

- Si on connaissait θ_j, on ferait payer à l'assuré j la prime de risque,

$$\mu_j = \mu(\theta_j) = \int x dF(x|\theta_j) = E[X|\theta_j].$$

- A l'opposé, on peut considérer la prime collective,

$$\mu = E[X] = E[E[X|\theta_j]].$$

- Si on différencie, une première estimation de μ_j vaut :

$$\hat{\mu}_j = \bar{X}_{j.},$$

- Estimation de μ :

$$\hat{\mu} = \bar{X}.$$

Prime de risque, prime collective

- Si on connaissait θ_j, on ferait payer à l'assuré j la prime de risque,

$$\mu_j = \mu(\theta_j) = \int x dF(x|\theta_j) = E[X|\theta_j].$$

- A l'opposé, on peut considérer la prime collective,

$$\mu = E[X] = E[E[X|\theta_j]].$$

- Si on différencie, une première estimation de μ_j vaut :

$$\hat{\mu}_j = \bar{X}_{j.},$$

- Estimation de μ :

$$\hat{\mu} = \bar{X}.$$

Vision bayésienne 1/2

- On suppose que $\theta_j \sim P$ (loi a priori). On connaît donc la loi de X pour une classe prise au hasard.
- Sur une classe j, on dispose de l'historique $X_{j1}, ..., X_{jT}$.
- Notations : $l(\theta', \theta)$ une fonction de perte (par exemple $(\theta' - \theta)^2$, on note $R(\hat{\theta}, \theta) = E_\theta[l(\hat{\theta}, \theta)] = E[l(\hat{\theta}, \theta)|\theta]$.
- Rappel : l'estimateur bayésien de θ (pour la fonction de perte l) est l'estimateur $\hat{\theta}$ qui minimise

$$\int R(\hat{\theta}, \theta) dP(\theta) = E[l(\hat{\theta}, \theta))].$$

- Ici : même chose, sauf qu'on n'estime plus nécessairement θ_j mais $\mu(\theta_j)$.

Vision bayésienne 1/2

- On suppose que $\theta_j \sim P$ (loi a priori). On connaît donc la loi de X pour une classe prise au hasard.
- Sur une classe j, on dispose de l'historique $X_{j1}, ..., X_{jT}$.
- Notations : $l(\theta', \theta)$ une fonction de perte (par exemple $(\theta' - \theta)^2$, on note $R(\hat{\theta}, \theta) = E_\theta[l(\hat{\theta}, \theta)] = E[l(\hat{\theta}, \theta)|\theta]$.
- Rappel : l'estimateur bayésien de θ (pour la fonction de perte l) est l'estimateur $\hat{\theta}$ qui minimise

$$\int R(\hat{\theta}, \theta) dP(\theta) = E[l(\hat{\theta}, \theta))].$$

- Ici : même chose, sauf qu'on n'estime plus nécessairement θ_j mais $\mu(\theta_j)$.

Vision bayésienne 2/2

- Cas classique : $l(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ et $\mu(\theta) = \theta$.
- $\hat{\theta}$ est un estimateur, donc $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_{j1}, ..., X_{jT})$.
- L'estimateur bayésien de θ_j est

$$E\left[\theta_j | X_{j1}, ..., X_{jT}\right].$$

- Pour une fonction μ générale, la prime bayésienne pour la classe j est

$$E\left[\mu(\theta_j) | X_{j1}, ..., X_{jT}\right] = E\left[X_{j(T+1)} | X_{j1}, ..., X_{jT}\right].$$

- Problèmes :
  - Dépend de la loi à priori
  - Difficile à calculer explicitement dans certains cas

Vision bayésienne 2/2

- Cas classique : $l(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ et $\mu(\theta) = \theta$.
- $\hat{\theta}$ est un estimateur, donc $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_{j1}, ..., X_{jT})$.
- L'estimateur bayésien de θ_j est

$$E\left[\theta_j | X_{j1}, ..., X_{jT}\right].$$

- Pour une fonction μ générale, la prime bayésienne pour la classe j est

$$E\left[\mu(\theta_j) | X_{j1}, ..., X_{jT}\right] = E\left[X_{j(T+1)} | X_{j1}, ..., X_{jT}\right].$$

- Problèmes :
  - Dépend de la loi à priori
  - Difficile à calculer explicitement dans certains cas

Vision bayésienne 2/2

- Cas classique : $l(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ et $\mu(\theta) = \theta$.
- $\hat{\theta}$ est un estimateur, donc $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_{j1}, ..., X_{jT})$.
- L'estimateur bayésien de θ_j est

$$E\left[\theta_j | X_{j1}, ..., X_{jT}\right].$$

- Pour une fonction μ générale, la prime bayésienne pour la classe j est

$$E\left[\mu(\theta_j) | X_{j1}, ..., X_{jT}\right] = E\left[X_{j(T+1)} | X_{j1}, ..., X_{jT}\right].$$

- Problèmes :
  - Dépend de la loi à priori
  - Difficile à calculer explicitement dans certains cas

Modèle de Bühlmann

- Bühlmann (1967) propose de chercher une prime du type

$$\pi_j = z_j \bar{X}_{j.} + (1 - z_j)\bar{X},$$

où z_j est appelé facteur de crédibilité.

Modèle de Bühlmann

On suppose que

$$X_{jt} = \mu + \xi_j + \varepsilon_{jt},$$

avec $\xi_j = (\mu(\theta_j) - \mu)$, et :

1. $E[\xi_j] = E[\varepsilon_{jt}] = 0$,
2. $Var(\xi_j) = a$,
3. $Var(\varepsilon_{jt}) = s^2$.

Autre écriture

- θ_j le facteur de risque aléatoire (non observé).
- $\mu = E[X_{jt}]$.
- $\mu + \xi_j = E[X_{jt}|\theta_j]$.
- Les paramètres a et s correspondent à la décomposition de la variance en

$$Var(X_{jt}) = E[Var(X_{jt}|\theta_j)] + Var(E[X_{jt}|\theta_j]).$$

- $a = Var(E[X_{jt}|\theta_j])$ et $s^2 = E[Var(X_{jt}|\theta_j)]$.

Crédibilité dans le modèle de Bühlmann

Théorème

La prime $\pi_j = z_j \bar{X}_{j.} + (1 - z_j)\bar{X}$ avec la crédibilité uniforme

$$z_j = \frac{aT}{aT + s^2},$$

coïncide avec le meilleur estimateur linéaire sans biais $\hat{\mu}_j(X_{11}, ..., X_{JT})$ pour le risque à posteriori quadratique

$$E\left[\{X_{j,T+1} - \hat{\mu}_j(X_{11}, ..., X_{JT})\}^2\right].$$

- En pratique,

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j,t} (X_{jt} - \bar{X}_{j.})^2, \quad \hat{a} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^{J} (\bar{X}_{j.} - \bar{X})^2 - \frac{1}{T}\bar{s}^2.$$

Modèles de Bühlmann et Bühlmann-Straub

Propriétés asymptotiques du facteur de crédibilité optimal

- Remarques :
  - On prend bien entendu $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - On peut, dans certains cas, supposer $E[X]$ connue (par exemple dans le cadre bayésien), et remplacer $\bar{X}$ par $E[X]$ dans la prime optimale.

Propriétés

1. Si $T \to \infty$, alors $z \to 1$.
2. Si $a \to 0$, alors $z \to 0$.
3. Si $a \to \infty$, alors $z \to 1$.
4. Si $s^2 \to \infty$, alors $z \to 0$.

Modèle de Bühlmann-Straub (1970)

Modèle de Bühlmann-Straub

On suppose que

$$X_{jt} = \mu + \xi_j + \varepsilon_{jt},$$

avec $\xi_j = (\mu(\theta_j) - \mu)$, et :

1. $E[\xi_j] = E[\varepsilon_{jt}] = 0$,
2. $Var(\xi_j) = a$,
3. $Var(\varepsilon_{jt}) = \frac{s^2}{w_{jt}}$,

où w_{jt} représente un facteur de poids de l'observation (j, t).

- Tient compte du fait que l'exposition au risque change d'une classe à l'autre et d'une année sur l'autre.

Modèle de Bühlmann-Straub (1970)

Modèle de Bühlmann-Straub

On suppose que

$$X_{jt} = \mu + \xi_j + \varepsilon_{jt},$$

avec $\xi_j = (\mu(\theta_j) - \mu)$, et :

1. $E[\xi_j] = E[\varepsilon_{jt}] = 0$,
2. $Var(\xi_j) = a$,
3. $Var(\varepsilon_{jt}) = \frac{s^2}{w_{jt}}$,

où w_{jt} représente un facteur de poids de l'observation (j, t).

- Tient compte du fait que l'exposition au risque change d'une classe à l'autre et d'une année sur l'autre.

Facteur de crédibilité optimal dans Bühlmann-Straub

- On définit la masse totale de la classe j,

$$w_{j\cdot} = \sum_{t=1}^{T} w_{jt}.$$

- On cherche une prime linéaire en les X_{jt}, i.e. du type

$$\hat{\mu}_j(X_{11}, \ldots, X_{JT}) = g_{11}X_{11} + \ldots + g_{JT}X_{JT}.$$

Facteur de crédibilité optimal dans Bühlmann-Straub

- On définit

$$\bar{X}_{j,w} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_{jt} X_{jt}}{w_{j.}}, \qquad z_j = \frac{a w_{j.}}{s^2 + a w_{j.}},$$

$$z_{.} = \sum_{j=1}^{J} z_j, \qquad \bar{X}_{z,w} = \sum_{j=1}^{J} \frac{z_j}{z_{.}} \bar{X}_{j,w}.$$

Facteur de crédibilité optimal dans Bühlmann-Straub

Théorème - Modèle de Bühlmann-Straub

La prime $\pi_j = z_j \bar{X}_{j,w} + (1 - z_j)\bar{X}_{z,w}$ avec la crédibilité

$$z_j = \frac{aw_{j.}}{s^2 + aw_{j.}},$$

coïncide avec le meilleur estimateur linéaire sans biais $\hat{\mu}_j(X_{11}, ..., X_{JT})$ pour le risque à posteriori quadratique

$$E\left[\{X_{j,T+1} - \hat{\mu}_j(X_{11}, ..., X_{JT})\}^2\right].$$

Modèles de Bühlmann et Bühlmann-Straub

Estimateurs des paramètres du modèle de Bühlmann-Straub

Estimateurs classiques (sans biais)

On définit

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \sum_{j=1}^{J} \frac{w_{j.}}{w_{..}} \bar{X}_{jw}, \qquad w_{..} = \sum_{j=1}^{J} w_{j.}, \\
\hat{s}^2 &= \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j,t} w_{j,t}(X_{jt} - X_{jw})^2, \\
\hat{a} &= \frac{\sum_j w_{j.}(X_{jw} - \hat{\mu})^2 - (J-1)\hat{s}^2}{w_{..} - \sum_j w_{j.}^2 / w_{..}}.
\end{aligned}
$$

Outline

Crédibilité hiérarchique

- Cadre : Portefeuille d'assurance où les contrats sont classifiés en cohortes.
- On a à présent X_{ijt} avec i qui correspond au numéro de la cohorte.
- Indicateur de risque lié à la cohorte i : Φ_i.
- Indicateur de risque pour l'appartenance, au sein de la cohorte i, au "pays" j : $\Theta_{i,j}$. On suppose que les $\Theta_{i,j}$ sont i.i.d. conditionnellement aux Φ_i.

Crédibilité hiérarchique

- Cadre : Portefeuille d'assurance où les contrats sont classifiés en cohortes.
- On a à présent X_{ijt} avec i qui correspond au numéro de la cohorte.
- Indicateur de risque lié à la cohorte i : Φ_i.
- Indicateur de risque pour l'appartenance, au sein de la cohorte i, au "pays" j : $\Theta_{i,j}$. On suppose que les $\Theta_{i,j}$ sont i.i.d. conditionnellement aux Φ_i.

Crédibilité hiérarchique

- Cadre : Portefeuille d'assurance où les contrats sont classifiés en cohortes.
- On a à présent X_{ijt} avec i qui correspond au numéro de la cohorte.
- Indicateur de risque lié à la cohorte i : Φ_i.
- Indicateur de risque pour l'appartenance, au sein de la cohorte i, au "pays" j : $\Theta_{i,j}$. On suppose que les $\Theta_{i,j}$ sont i.i.d. conditionnellement aux Φ_i.

frametitleHypothèses et notations

- On note $\mu(\Theta_{i,j},\Phi_i) = E[X_{ijt}|\Theta_{i,j},\Phi_i]$.
- On a
$$Var(X_{ijt}|\Theta_{i,j},\Phi_i) = \frac{\sigma^2(\Theta_{i,j},\Phi_i)}{w_{jt}},$$
où w_{ijt} désigne à nouveau un poids.
- Moyenne collective : $m = E[\mu(\Theta_{i,j},\Phi_i)]$.
- Variance intra-assuré moyenne : $s = E[\sigma^2(\Theta_{i,j},\Phi_i)]$.
- Variance intra-cohorte moyenne : $a = E[Var(\mu(\Theta_{i,j},\Phi_i))|\Phi_i]$.
- Variance inter-cohortes : $b = Var[E(\mu(\Theta_{i,j},\Phi_i))|\Phi_i]$.

Recherche de la prime linéaire

- A nouveau, on cherche une prime qui s'exprime linéairement en fonction des X_{ijt}.

Prime linéaire idéale

La prime linéaire optimale est définie de façon récursive par

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= z_{ij}\bar{X}_{ijw} + (1 - z_{ij})\pi_i \\ \pi_i &= z_i\bar{X}_{iw} + (1 - z_i)\hat{\mu}, \end{aligned}$$

en définissant $\bar{X}_{ijw}$ moyenne pondérée des X_{ijt} sur toutes les années et

$$\bar{X}_{iw} = \sum_j \frac{z_{ij}}{\sum_{k,l} z_{kl}} \bar{X}_{ijw}.$$

Outline

Régression

- Les modèles précédents supposent une stabilité dans le temps.
- Une généralisation possible est

$$X_{jt} = \beta_0 + \beta_1 t + \xi_j + \varepsilon_{jt}.$$

Cas des IBNR

- Rappel : IBNR = Incurred But Not Reported.
- Modèle de crédibilité de Vijlder :

$$X_{jt} = (m + \xi_j)d_t + \varepsilon_{jt}.$$

- d_t facteur de développement l'année t.