

Feuille d'exercices n° 2
Compléments de la théorie de la ruine

Exercice 1.

Un assureur dispose d'un portefeuille de risques partitionné en deux classes : les grands risques de coûts notés X_i^1 , et les petits risques de coûts notés X_i^2 , où les deux types de risque sont indépendants. La charge sinistrale totale au temps t de la compagnie est notée

$$S_t = S_t^1 + S_t^2$$

où $S_t^1 = \sum_{i=1}^{N_t^1} X_i^1$ est la charge sinistrale de la première classe et $S_t^2 = \sum_{i=1}^{N_t^2} X_i^2$ celle de la seconde classe. Les processus $(N_i)_{i=1,2}$ sont des processus de Poisson d'intensité λ_i indépendants entre eux et indépendants des différents coûts $X_i^1, X_i^2, i \geq 1$. On suppose que $(X_i^1, i \geq 1)$ est un échantillon de loi F_1 et que $(X_i^2, i \geq 1)$ un échantillon de loi F_2 .

1. Rappeler la valeur de la fonction $m_{S_t^1}$, fonction génératrice des moments de S_t^1 , puis celle de S_t^2 et en déduire celle de S_t .
2. Vérifier que S est bien un processus de Poisson composé qu'on écrira sous la forme

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0,$$

où N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ et $(Y_i, i \geq 1)$ un échantillon de loi F mélange des lois F^1 et F^2 dont on précisera les coefficients du mélange.

3. Calculer la fonction génératrice des moments m_Y de Y dans le cas de mélange de deux loi exponentielles de paramètres β_1 et β_2 .

Exercice 2.

Un assureur possède d'un portefeuille de risques modélisé par un processus de Poisson composé $S(t)$ avec N_t un processus de Poisson d'intensité β et $(X_i, i \geq 1)$ des coûts des sinistres i.i.d. de loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$. Il considère une possibilité de s'assurer contre les risques via un contrat de réassurance proportionnelle. Le réassureur demande une prime $(1 + \xi)\beta\mathbb{E}[\alpha X]$ et il rembourse αX sur chaque sinistre d'un coût X (réassurance proportionnelle).

1. Réécrire le processus de risque pour l'assureur en prenant en compte le contrat de réassurance.
2. En déduire une nouvelle valeur d'un coefficient d'ajustement.
3. Obtenir la condition que doivent vérifier les paramètres α et ξ pour que l'assureur ait l'intérêt de souscrire ce contrat de réassurance.