# TEST d'économétrie

## Eléments de correction

### Questions de cours

1. Pour chacune des variables suivantes préciser sa qualité.
   - Revenu annuel = quantitatif continu
   - Sexe = qualitatif nominal
   - État matrimonial = qualitatif nominal
   - Lieu de résidence = qualitatif nominal
   - Pointure = quantitatif discret
   - Nationalité = qualitatif nominal
   - Couleur des yeux = qualitatif nominal
   - Nombre de langues parlées = quantitatif discret
   - Âge = quantitatif discret
   - Tour de taille = quantitatif continu
2. Dans une distribution symétrique, la moyenne, la médiane et le mode sont-ils confondus? Illustrer par des exemples.

   Dans une distribution symétrique, moyenne et médiane sont confondus. Si le mode est unique, alors lui aussi est confondu avec moyenne et médiane sinon non.

3. Rappeler la définition des vecteurs colinéaires, linéairement indépendants et donner des exemples de vecteurs de dimension 3 qui sont l'un et l'autre, soit l'un et pas l'autre et ni l'un ni l'autre.

   Deux vecteurs $X$ et $Y$ sont colinéaires si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que $X = \lambda Y$ ou $Y = \lambda X$. Ils sont linéairement indépendants si $aX + bY = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. Dans $\mathbf{R^3}$, $X$, $Y$ et $Z$ sont linéairement indépendants si et seulement si la matrice $(X, Y, Z)$ est inversible. Les vecteurs colinéaires sont linéairement dépendants donc il n'existe pas de vecteurs colinéaires linéairement indépendants. Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$ sont colinéaires donc linéairement dépendants. Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont linéairement indépendants et non colinéaires. Les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont non colinéaires et linéairement dépendants.

4. Donner la définition d'une base orthonormée (b.o.n.) et donner un exemple dans $\mathbf{R^3}$. Est-il possible de trouver un vecteur $X$ tel que $(A, B, X)$ soit une b.o.n. avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une b.o.n. est une famille de vecteurs $(e_{}, \ldots, e_n)$ orthogonaux 2 à 2 $< e_i, e_j >= 0$ pour $i \neq j$ et normés $< e_i, e_i >= 1$ pour tout $i$. Par exemple $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ est une b.o.n. de $\mathbf{R^3}$. On a $< B, B >= 2 \neq 1$ donc $B$ n'est pas normé. Il ne peut faire partie d'aucune b.o.n.

**Exercice de Statistiques descriptives**

On considère les données suivantes :

| Ind. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Poids | 60 | 72 | 57 | 90 | 95 | 72 | 55 | 89 | 88 |
| Taille | 175 | 180 | 165 | 190 | 174 | 191 | 163 | 167 | 178 |
| Sexe | F | H | F | H | F | H | F | F | H |

1. Donner la qualité de chacune des variables du tableau de données ci-dessus.

   Poids = quantitatif discret,
   Taille = quantitatif discret,
   Sexe = qualitatif pur.

2. Calculer la moyenne, la variance de chacune des variables quantitatives ainsi que leur coefficient de corrélation (détailler les formules). Commenter ce dernier calcul.

   Soit $X$ la variable des poids et $Y$ celle de la taille. Alors $\bar{X} = 75$, $\bar{Y} = 176$, et $V(X) = \overline{(X - \bar{X})^2}/9 = 217$, $V(Y) = 91$ et $cor(X, Y) = \overline{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}/\sqrt{V(X)V(Y)} = 0.38$. La corrélation entre les variables n'est pas négligeables $\geq 0.05$; elle est positive donc les variables sont positivement dépendantes entre elles. Quand la taille augmente alors le poids aussi.

3. Soient $P_1$ et $P_2$ les classes formées des individus ayant un poids respectivement en dessous et au-dessus de la moyenne. Soient $T_1$ et $T_2$ les classes formées des individus ayant une taille respectivement en dessous et au-dessus de la moyenne.
   Déterminer les classes $C_1 = P_1 \cap T_1$, $C_2 = P_1 \cap T_2$, $C_3 = P_2 \cap T_1$ et $C_4 = P_2 \cap T_2$. Donner le tableau de contingence de la variable Sexe en fonction des classes $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$.

   On a $P_1 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, $P_2 = \{4, 5, 8, 9\}$, $T_1 = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $T_2 = \{2, 4, 6, 9\}$ donc $C_1 = \{1, 3, 7\}$, $C_2 = \{2, 6\}$, $C_3 = \{5, 8\}$ et $C_4 = \{4, 9\}$. On obtient le tableau de contingence

| Sexe\ Classe | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| H | 0 | 2 | 0 | 2 | 4 |
| F | 3 | 0 | 2 | 0 | 5 |
| Total | 3 | 2 | 2 | 2 | 9 |

4. Pour les classes $T_1$, $T_2$ tracer l'histogramme de la distribution marginale de la variable Taille ainsi que sa distribution conditionnellement à Sexe=H. Commenter. Les

histogrammes de la distribution de la taille sont différents marginalement et conditionnellement à Sexe=H. Donc la répartition de la taille est différentes chez les hommes et chez les femmes.

**Exercice de Calcul élémentaire sur les matrices**

On considère le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t & = & 2 \\ x + y + z - 3t & = & 1 \\ -x + y + 2z + t & = & 3 \end{cases}$$

1. Combien y a-t-il d'équations? D'inconnues? En déduire si il est possible de résoudre ce système.

   Il y a 3 équations et 4 inconnus donc le système à une infinité de solutions. Le système ne se résout pas car il n'a pas une unique solution.

2. On fixe $t = 1$. Ecrire le système sous forme matricielle

$$AX = B$$

   en identifiant les matrices $A$, $B$ et $X$ (on précisera leurs dimensions).

   On identifie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi $A \in \mathcal{M}(3,3)$, $X \in \mathbf{R^3}$ et $B \in \mathbf{R^3}$.

3. Inverser la matrice $A$ en détaillant la méthode de votre choix.

   On trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 5/6 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Donner les solutions $x$, $y$ et $z$ du système dans le cas $t = 1$.

   On a $X = A^{-1}B$ donc on calcule $X = (13/6, -1/2, 7/3)^T$ et on identifie $x = 13/6$, $y = -1/2$ et $z = 7/3$.