Université Paris-Dauphine — Année 2009-2010
U.F.R. Mathématiques de la décision
L3 - Statistique Mathématique

Examen

Eléments de correction

Exercice 1 : *(10 points)* On considère le modèle paramétrique $(P_\theta,]-1,1[)$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]-1/2, 1/2[$

$$f(x,\theta) = (1-\theta)^{1_{]-1/2,0[}(x)}(1+\theta)^{1_{]0,1/2[}(x)}.$$

1. Vérifier que le modèle est de la famille exponentielle et donner sa paramétrisation canonique.

   $$f(x,\theta) = (1-\theta)\exp(1_{]0,1/2[}(x)\log((1+\theta)/(1-\theta)))1_{]-1/2,1/2[}(x)$$

   d'ou $\tilde{\theta} = \log((1+\theta)/(1-\theta))$.
2. Montrer que le modèle est régulier.

   $\log((1+\theta)/(1-\theta))$ et $1_{]0,1/2[}(x)$ non constants donc affinement indépendants + $(\log((1+\theta)/(1-\theta)))' = 2/(1-\theta^2) > 0$ donc modèle identifiable. $1_{]0,1/2[}(x)$ borné donc de carré intégrable donc modèle régulier
3. Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ par la méthode des moments.

   $\mathbb{E}_\theta(X) = \theta/4$ donc $\hat{\theta}_n^{MM} = 4\overline{X}_n$.
4. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n^{MV}$ est fonction de $S_n = \sum_{i=1}^n 1_{[0,1/2]}(X_i)$.

   $$l_n(\theta) = \log(1/(1-\theta)) + S_n/n \log((1+\theta)/(1-\theta)),$$

   REV unique = EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = 2S_n/n - 1$.
5. En déduire l'estimateur de variance minimale T_n. Est-il efficace ?

   $\mathbb{E}_\theta(S_n/n) = P_\theta(0 < X < 1/2) = (1+\theta)/2$ donc $\hat{\theta}_n^{MV}$ sans biais $= T_n$. $\mathrm{Var}_\theta = (1-\theta^2)/n = I_n(\theta)^{-1}$.
6. Calculer les variances asymptotiques de ces estimateurs. Lequel choisir ?

   $\hat{\theta}_n^{MV} = T_n$ asymptotiquement efficace donc variance limite $1-\theta^2$. TLC donne $\hat{\theta}_n^{MM}$ asymptotiquement normal de variance limite $4/3-\theta^2$. On choisit $\hat{\theta}_n^{MV} = T_n$ car de variance minimale donc meilleur que tout estimateur sans biais comme $\hat{\theta}_n^{MM}$.

7. A l'aide de la fonction pivotale de Wald, donner un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$.

$$\{\theta \in]-1,1[\ / \ (\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)^2 \leq q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}(1 - (\hat{\theta}_n^{MV})^2)\}.$$

8. En déduire un test de niveau asymptotique α pour le problème $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta \neq 0$.

   Dualité test IC donne
   $$R_n = \{(X_1 \dots, X_n) \ / \ (\hat{\theta}_n^{MV})^2 > q_{1-\alpha}^{\chi_1^2}(1 - (\hat{\theta}_n^{MV})^2)\}.$$

9. Montrer que le modèle est à rapport de vraisemblance monotone pour le problème $H_0 : \theta \in]-1,0]$ contre $H_1 : \theta \in]0,1[$.

   Comme $\log((1+\theta)/(1-\theta))$ strictement croissante, modèle RVM en S_n

10. En déduire la méthode de construction d'un test uniformément plus puissant de niveau α pour le problème $H_0 : \theta \in]-1,0]$ contre $H_1 : \theta \in]0,1[$.

    TRV randomisé car S_n est discrète $\phi_{C,c} = 1$ lorsque $S_n > C$ avec C, c tels que $\sup_{\theta \in]-1,0]} \mathbb{E}_\theta(\phi_{C,c}) = \alpha$.

Exercice 2 : *(10 points)* On considère le modèle exponentiel translaté $(P_\theta, \theta = (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ tel que $X - \beta \sim \mathcal{E}(\lambda)$ de densité

$$f(x, \theta) = \lambda \exp(-\lambda(x - \beta)) 1_{[\beta, \infty[}(x).$$

1. Caluler les moments d'ordre 1 $m_1 = \mathbb{E}_\theta(X)$ et d'ordre 2 $m_2 = \mathbb{E}_\theta(X^2)$.

   $m_1 = 1/\lambda + \beta$ et $\mathbb{E}(X-\beta)^2 = 2/\lambda^2$ d'où $m_2 = 2/\lambda^2 + 2\beta/\lambda + \beta^2$.

2. Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ par la méthode des moments.

   Comme $\mathrm{Var}_\theta(X - \beta) = \mathrm{Var}_\theta(X) = m_2 - m_1^2 = 1/\lambda^2$ on trouve $\hat{\theta}_n^{MM} = (1/S_n, \overline{X}_n - S_n)$.

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$.

   Attention (H1) n'est pas satisfait. On écrit
   $$L_n(\theta) = \lambda^n \exp(n\lambda(\beta - \overline{X}_n)) 1_{]-\infty, X_{(1)}]}(\beta))$$
   fonction croissante en β sur $]-\infty, X_{(1)}]$ puis nul indépendemment de $\lambda > 0$. Le max est obtenu en $X_{(1)}$, on le réinjecte et on maximise
   $$\lambda^n \exp(n\lambda(X_{(1)} - \overline{X}_n))$$
   soit en passant au log
   $$g(\lambda) = n\log(\lambda) + n\lambda(X_{(1)} - \overline{X}_n).$$
   $g'' = -n/\lambda^2 < 0$ strictement concave, un unique maximum global $(\overline{X}_n - X_{(1)})^{-1}$ d'où $\hat{\theta}_n^{MV} = ((\overline{X}_n - X_{(1)})^{-1}, X_{(1)})$.

4. On note $\widehat{\theta}_n^{MV} = (\hat{\lambda}_n, \hat{\beta}_n)$, montrer que $\hat{\beta}_n - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$.

   Par la méthode de la fonction de répartition.
5. Calculer le risque quadratique de $\hat{\beta}_n$ et montrer que $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{P} 0$.

   $R_n(\beta_n) = \mathbb{E}_\theta(\beta_n - \beta)^2 = \mathbb{E}(Y^2)$ avec $Y \sim \mathcal{E}(n\lambda)$ donc $R_n(\hat{\beta}_n) = 2/(n\lambda)^2$, d'où $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ converge vers 0 dans L^2 donc en proba.
6. En utlisant le TLC sur $(X_i - \beta)_{i\in\mathbb{N}}$, déterminer la loi asymptotique de $\overline{X}_n - \hat{\beta}_n$.

   $(X_i - \beta)_{i\in\mathbb{N}}$ iid avec un moment d'ordre fini donc
   $$\sqrt{n}(\overline{X - \beta}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2).$$
   Comme $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \hat{\beta}_n - 1/\lambda) = \sqrt{n}(\overline{X - \beta}_n - 1/\lambda) + \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ Slutsky donne
   $$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \hat{\beta}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2).$$
7. En déduire que $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.

   δ-méthode.
8. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\hat{\lambda}_n/a, \hat{\lambda}_n/b]$ soit un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour λ.

   $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n/\lambda - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ d'où $a = 1 + q^N_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$ et $b = 1 - q^N_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$.
9. Déterminer $C > 0$ tel que le test de zone de rejet $R_n = \{\hat{\lambda}_n > C\}$ soit de niveau asymptotique α pour le problème $H_0 : \lambda \leq 1$ contre $H_1 : \lambda > 1$.

   Proba de rejeter

   $P_\theta(R_n) = 1 - P_\theta(\hat{\lambda}_n \leq C) = 1 - P_\theta(\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n/\lambda - 1) \leq \sqrt{n}(C/\lambda - 1)) \to 1 - \Phi(\sqrt{n}(C/\lambda - 1))$.

   Fonction croissante en λ donc risque asymptotique de première espèce
   $$\sup_{\lambda\leq 1} 1 - \Phi(\sqrt{n}(C/\lambda - 1)) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(C - 1))$$
   D'où $\sqrt{n}(C - 1) = q^N_{1-\alpha}$ soit $C = 1 + q^N_{1-\alpha}/\sqrt{n}$.
10. Ce test est-il convergent ?

    Puissance asymptotique du test $1 - \Phi(q^N_{1-\alpha})/\lambda + \sqrt{n}(1/\lambda - 1)))$ pour $\lambda > 1$. Comme $1/\lambda - 1 < 0$ converge vers 1 et le test est convergent.