

Examén

Eléments de correction

**Exercice 1 :** (10 points) On considère le modèle paramétrique  $(P_\theta, ] - 1, 1[)$  de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $] - 1/2, 1/2[$

$$f(x, \theta) = (1 - \theta)^{1_{]-1/2, 0[}(x)} (1 + \theta)^{1_{]0, 1/2[}(x)}.$$

1. Vérifier que le modèle est de la famille exponentielle et donner sa paramétrisation canonique.

$$f(x, \theta) = (1 - \theta) \exp(1_{]0, 1/2[}(x) \log((1 + \theta)/(1 - \theta))) 1_{]-1/2, 1/2[}(x)$$

d'où  $\tilde{\theta} = \log((1 + \theta)/(1 - \theta))$ .

2. Montrer que le modèle est régulier.

$\log((1 + \theta)/(1 - \theta))$  et  $1_{]0, 1/2[}(x)$  non constants donc affinement indépendants +  $(\log((1 + \theta)/(1 - \theta)))' = 2/(1 - \theta^2) > 0$  donc modèle identifiable.  $1_{]0, 1/2[}(x)$  borné donc de carré intégrable donc modèle régulier

3. Déterminer l'estimateur  $\hat{\theta}_n^{MM}$  par la méthode des moments.

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \theta/4 \text{ donc } \hat{\theta}_n^{MM} = 4\bar{X}_n.$$

4. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n^{MV}$  est fonction de  $S_n = \sum_{i=1}^n 1_{]0, 1/2[}(X_i)$ .

$$l_n(\theta) = \log(1/(1 - \theta)) + S_n/n \log((1 + \theta)/(1 - \theta)),$$

$$\text{REV unique} = \text{EMV } \hat{\theta}_n^{MV} = 2S_n/n - 1.$$

5. En déduire l'estimateur de variance minimale  $T_n$ . Est-il efficace ?

$$\mathbb{E}_\theta(S_n/n) = P_\theta(0 < X < 1/2) = (1 + \theta)/2 \text{ donc } \hat{\theta}_n^{MV} \text{ sans biais} = T_n. \text{Var } \theta = (1 - \theta^2)/n = I_n(\theta)^{-1}.$$

6. Calculer les variances asymptotiques de ces estimateurs. Lequel choisir ?

$\hat{\theta}_n^{MV} = T_n$  asymptotiquement efficace donc variance limite  $1 - \theta^2$ . TLC donne  $\hat{\theta}_n^{MM}$  asymptotiquement normal de variance limite  $4/3 - \theta^2$ . On choisit  $\hat{\theta}_n^{MV} = T_n$  car de variance minimale donc meilleur que tout estimateur sans biais comme  $\hat{\theta}_n^{MM}$ .

7. A l'aide de la fonction pivotale de Wald, donner un intervalle de confiance de niveau asymptotique  $1 - \alpha$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$ .

$$\{\theta \in ]-1, 1[ / (\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)^2 \leq q_{1-\alpha}^{\chi_1^2} (1 - (\hat{\theta}_n^{MV})^2)\}.$$

8. En déduire un test de niveau asymptotique  $\alpha$  pour le problème  $H_0 : \theta = 0$  contre  $H_1 : \theta \neq 0$ .

Dualité test IC donne

$$R_n = \{(X_1, \dots, X_n) / (\hat{\theta}_n^{MV})^2 > q_{1-\alpha}^{\chi_1^2} (1 - (\hat{\theta}_n^{MV})^2)\}.$$

9. Montrer que le modèle est à rapport de vraisemblance monotone pour le problème  $H_0 : \theta \in ]-1, 0]$  contre  $H_1 : \theta \in ]0, 1[$ .

Comme  $\log((1 + \theta)/(1 - \theta))$  strictement croissante, modèle RVM en  $S_n$

10. En déduire la méthode de construction d'un test uniformément plus puissant de niveau  $\alpha$  pour le problème  $H_0 : \theta \in ]-1, 0]$  contre  $H_1 : \theta \in ]0, 1[$ .

TRV randomisé car  $S_n$  est discrète  $\phi_{C,c} = 1$  lorsque  $S_n > C$  avec  $C, c$  tels que  $\sup_{\theta \in ]-1, 0]} \mathbb{E}_\theta(\phi_{C,c}) = \alpha$ .

**Exercice 2 :** (10 points) On considère le modèle exponentiel translaté  $(P_\theta, \theta = (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$  tel que  $X - \beta \sim \mathcal{E}(\lambda)$  de densité

$$f(x, \theta) = \lambda \exp(-\lambda(x - \beta)) 1_{[\beta, \infty[}(x).$$

1. Calculer les moments d'ordre 1  $m_1 = \mathbb{E}_\theta(X)$  et d'ordre 2  $m_2 = \mathbb{E}_\theta(X^2)$ .

$$m_1 = 1/\lambda + \beta \text{ et } \mathbb{E}(X - \beta)^2 = 2/\lambda^2 \text{ d'où } m_2 = 2/\lambda^2 + 2\beta/\lambda + \beta^2.$$

2. Déterminer l'estimateur  $\hat{\theta}_n^{MM}$  par la méthode des moments.

Comme  $\text{Var}_\theta(X - \beta) = \text{Var}_\theta(X) = m_2 - m_1^2 = 1/\lambda^2$  on trouve  $\hat{\theta}_n^{MM} = (1/S_n, \bar{X}_n - S_n)$ .

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n^{MV}$ .

Attention (H1) n'est pas satisfait. On écrit

$$L_n(\theta) = \lambda^n \exp(n\lambda(\beta - \bar{X}_n)) 1_{]-\infty, X_{(1)}]}(\beta)$$

fonction croissante en  $\beta$  sur  $]-\infty, X_{(1)}]$  puis nul indépendamment de  $\lambda > 0$ . Le max est obtenu en  $X_{(1)}$ , on le réinjecte et on maximise

$$\lambda^n \exp(n\lambda(X_{(1)} - \bar{X}_n))$$

soit en passant au log

$$g(\lambda) = n \log(\lambda) + n\lambda(X_{(1)} - \bar{X}_n).$$

$g'' = -n/\lambda^2 < 0$  strictement concave, un unique maximum global  $(\bar{X}_n - X_{(1)})^{-1}$  d'où  $\hat{\theta}_n^{MV} = ((\bar{X}_n - X_{(1)})^{-1}, X_{(1)})$ .

4. On note  $\hat{\theta}_n^{MV} = (\hat{\lambda}_n, \hat{\beta}_n)$ , montrer que  $\hat{\beta}_n - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$ .

Par la méthode de la fonction de répartition.

5. Calculer le risque quadratique de  $\hat{\beta}_n$  et montrer que  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{P} 0$ .

$R_n(\beta_n) = \mathbb{E}_\theta(\beta_n - \beta)^2 = \mathbb{E}(Y^2)$  avec  $Y \sim \mathcal{E}(n\lambda)$  donc  $R_n(\hat{\beta}_n) = 2/(n\lambda)^2$ , d'où  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  converge vers 0 dans  $L^2$  donc en proba.

6. En utilisant le TLC sur  $(X_i - \beta)_{i \in \mathbb{N}}$ , déterminer la loi asymptotique de  $\bar{X}_n - \hat{\beta}_n$ .

$(X_i - \beta)_{i \in \mathbb{N}}$  iid avec un moment d'ordre fini donc

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \beta_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2).$$

Comme  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \hat{\beta}_n - 1/\lambda) = \sqrt{n}(\bar{X} - \beta_n - 1/\lambda) + \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$  Slutsky donne

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \hat{\beta}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2).$$

7. En déduire que  $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$ .

$\delta$ -méthode.

8. Déterminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $[\hat{\lambda}_n/a, \hat{\lambda}_n/b]$  soit un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\lambda$ .

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n/\lambda - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \text{ d'où } a = 1 + q_{1-\alpha/2}^N/\sqrt{n} \text{ et } b = 1 - q_{1-\alpha/2}^N/\sqrt{n}.$$

9. Déterminer  $C > 0$  tel que le test de zone de rejet  $R_n = \{\hat{\lambda}_n > C\}$  soit de niveau asymptotique  $\alpha$  pour le problème  $H_0 : \lambda \leq 1$  contre  $H_1 : \lambda > 1$ .

Proba de rejeter

$$P_\theta(R_n) = 1 - P_\theta(\hat{\lambda}_n \leq C) = 1 - P_\theta(\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n/\lambda - 1) \leq \sqrt{n}(C/\lambda - 1)) \rightarrow 1 - \Phi(\sqrt{n}(C/\lambda - 1)).$$

Fonction croissante en  $\lambda$  donc risque asymptotique de première espèce

$$\sup_{\lambda \leq 1} 1 - \Phi(\sqrt{n}(C/\lambda - 1)) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(C - 1))$$

$$\text{D'où } \sqrt{n}(C - 1) = q_{1-\alpha}^N \text{ soit } C = 1 + q_{1-\alpha}^N/\sqrt{n}.$$

10. Ce test est-il convergent ?

Puissance asymptotique du test  $1 - \Phi(q_{1-\alpha}^N/\lambda + \sqrt{n}(1/\lambda - 1))$  pour  $\lambda > 1$ . Comme  $1/\lambda - 1 < 0$  converge vers 1 et le test est convergent.