

Feuille de Travaux Dirigés 4

Z- et M-estimateurs

Exercice 1 On considère le modèle Binomiale $(\mathcal{B}(N, p), (N, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[)$.

1. Dans un premier temps $\theta = (N, p)$. Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ de θ obtenu par la méthode des moments.
2. Donner le comportement asymptotique de $\hat{\theta}_n^{MM}$.
3. On s'intéresse désormais à l'estimation de $0 < p < 1$ seul, i.e. $\theta = p$. Calculer l'estimateur T_n pour la nouvelle paramétrisation $\theta = p$ obtenu par la méthode des moments.
4. Montrer que le modèle est de la famille exponentielle.
5. Montrer que le modèle est identifiable et régulier.
6. Calculer l'unique estimateur de variance minimale. Est-il efficace ?
7. Donner le comportement asymptotique de T_n .

Eercice 2 Soit le modèle de Cauchy avec changement d'échelle $(P_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ tel que

$$f(x, a, b) = \frac{1}{\pi a(1 + a^{-2}(x - b)^2)}.$$

Dans un premier temps $a = 1$ est connu et $\theta = b$.

1. On propose l'estimateur T_n de θ :

$$T_n = \tan \left(\frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \text{signe}(X_i) \right).$$

Comment cet estimateur a-t-il été obtenu ? Donner les propriétés asymptotiques de T_n .

2. On suppose désormais $a > 0$ inconnu et que $\theta = (a, b)$. Calculer le premier et le troisième quartile $q_{1/4}$ et $q_{3/4}$.
3. En déduire un estimateur W_n en utilisant les quantiles empiriques.
4. Quelles sont les propriétés asymptotiques de W_n ?

Exercice 3 Soit le modèle de Laplace $(P_\theta, \theta \in \mathbb{R})$ tel que

$$f(x, \theta) = \frac{1}{2} \exp(-|x - \theta|).$$

1. Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ de θ obtenu par la méthode des moments. Quelles sont ces propriétés asymptotiques ?
2. Calculer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance.
3. Le modèle est-il régulier ? Quelles sont les propriétés asymptotiques de $\hat{\theta}_n^{MV}$?
4. Quel estimateur choisir ?

Exercice 4 On considère le modèle de Pareto de paramètres $\alpha > 1$ et $\lambda > 0$ et de densité

$$f(x; \alpha, \lambda) = (\alpha - 1)\lambda^{\alpha-1}x^{-\alpha}1_{[\lambda, +\infty[}(x).$$

On suppose que $\theta = (\alpha, \lambda)$.

1. En faisant les hypothèses nécessaires sur Θ , calculer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ de θ obtenu par la méthode des moments.
2. En toute généralité $\Theta =]1, +\infty[\times]0, +\infty[$ calculer l'EMV. Est-il un M-estimateur ?
3. On suppose désormais que λ est connu et que $\theta = \alpha > 1$. Montrer que la méthode des moments n'est pas applicable. Calculer l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV}$ ainsi qu'un estimateur $\hat{\theta}_n^{MMG}$ de θ obtenu par la méthode des moments généralisés (on utilise la loi de $\log(X/\lambda)$ étudiée dans le TD3).
4. Calculer le biais de $\hat{\theta}_n^{MV}$. En déduire T_n l'estimateur sans biais de variance minimale.
5. Quel estimateur choisir parmi ces 3 estimateurs. Sont-ils efficaces ? asymptotiquement efficaces ?