TD DE MODÈLES LINÉAIRES I - SÉRIE 1 : RAPPELS

Exercice 1.

1) Soit U de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer de deux façons différentes la loi de

$$X = -\log(1 - U).$$

2) Soit F une fonction de répartition continue et strictement croissante, et U de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$, où F^{-1} est la fonction réciproque de F ?

Exercice 2. Une variable aléatoire est dite de loi Gamma de paramètres α et λ ($\alpha > 0, \lambda > 0$), notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, si sa loi a la densité:

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{(0,+\infty)}(x),$$

où $\forall\alpha > 0,\ \Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$

1) Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Calculer sa transformée de Laplace. Calculer sa moyenne et sa variance par deux méthodes.

2) Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Donner la loi de X^2.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ et $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$.

a) Donner la loi de $X + Y$.

b) Montrer que $X + Y$ et $\dfrac{X}{X + Y}$ sont indépendantes et calculer leur loi de probabilité.

4) Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, donner la loi de la somme $S_n = X_1 + ... + X_n$.

5) Si $Y_1, ..., Y_n$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes de loi $N(0, 1)$, donner la loi de probabilité de $Z = Y_1^2 + ... + Y_n^2$ et calculer sa transformée de Laplace, sa moyenne et variance.

Rappels :

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall\alpha > 0$,

$B(\alpha_1, \alpha_2) = \displaystyle\int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1 - u)^{\alpha_2-1} du = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $\forall\alpha_1, \alpha_2 > 0$,

La densité d'une loi $\beta(a, b)$, $a, b > 0$, est $f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}$.

Exercice 3. Soient X et ξ deux variables aléatoires indépendantes, ayant des moments d'ordre 2 finis, avec $E(X) = E(\xi) = 0$.

1) On pose $Y = h(X) + \xi$, où h est une fonction borélienne à valeurs rélles. Montrer que $E(Y/X) = h(X)$, et qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette égalité soit vraie est que $E(\xi/X) = 0$.

2) On pose $Y = bX + \xi$, où b est un réel. Montrer que

$$E(Y/X) = \frac{Cov(Y, X)}{Var(X)} X.$$

3) On pose $Y = X^2 + \xi$, et on suppose que la loi de X est symétrique. Montrer que $E(Y/X) = X^2$, mais que $Cov(Y, X) = 0$.