TD DE MODÈLES LINÉAIRES I - SÉRIE 2 : LOI GAUSSIENNE

Exercice 1. Soit X un vecteur aléatoire de dimension p et deux matrices A et B de dimension (n,p). Calculer $\mathbb{E}(AX)$, $\mathrm{Var}(AX)$ et $\mathrm{Cov}(AX, BX)$.

Exercice 2. Soit X de loi $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Trouver une matrice A de dimension (3,3) telle que AX soit un vecteur de composantes indépendantes.

Exercice 3.

(1) Soient X et ε deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que $\mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$ et X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = \varepsilon X$.

(a) Calculer la fonction de répartition de Y. En déduire sa loi.

(b) Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles non corrélées?

(c) Calculer $\mathbb{P}(X + Y = 0)$. Le vecteur (X, Y) est-il gaussien? Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes?

(2) Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose U = X - Y et V = X + Y - 2 Z.

(a) Quelles sont les lois de U et de V?

(b) Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes?

Exercice 4. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien tel que $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \mathbb{E}X_i = 0, \mathbb{E}X_i^2 = 1$ et $\mathbb{E}(X_i X_j) = 1/2,\ i \neq j$. Écrire la fonction caractéristique de ce vecteur et chercher sa densité.

Exercice 5. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On pose $Y_i = X_i - X_1, 2 \leq i \leq n$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$.

(1) Quelle est la loi de $(Y_2, ..., Y_n)$?

(2) Montrer que $(Y_2, ..., Y_n)$ est indépendant de $\bar{X}_n$. En déduire que $\bar{X}_n$ et s_n^2 sont indépendants.

(3) Quelle est la loi de la statistique de Student $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{s_n}$?

Exercice 5. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$ des réels. Montrer que $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ et $Z = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ sont indépendantes équivaut à $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.