TD DE MODÈLES LINÉAIRES I - SÉRIE 5

Nous disposons pour n entreprises, $i = 1, ..., n$, des valeurs du capital K_i, de la valeur ajoutée VA_i et de l'emploi L_i. Nous supposons que la fonction de production de ces entreprises est du type Cobb-Douglas :

$$VA_i = \alpha^* L_i^{\lambda} K_i^{\gamma}.$$

Soit en passant aux logarithmes :

$$\log VA_i = \log \alpha^* + \lambda \log L_i + \gamma \log K_i = \alpha + \lambda \log L_i + \gamma \log K_i.$$

Le modéle de régression linéaire associé est du type :

$$\log VA_i = \alpha + \lambda \log L_i + \gamma \log K_i + \varepsilon_i.$$

o α, λ, γ sont des paramètres inconnus et ε_i est une variable aléatoire gaussienne telle que $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ et $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ lorsque $i \neq j$.

1) Ecrire le modèle sous la forme matricielle $Y = X\beta + \xi$ avec Y , X et β que l'on précisera. Rappeler l'expression matricielle de l'estimateur MCO $\hat{\beta}$ de β. Que vaut sa matrice de variance-covariance? Donner un estimateur s_n^2 de σ^2 sans biais et un estimateur de $Var(\hat{\beta})$.

2) Pour 1658 entreprises, nous avons obtenu à l'aide de l'estimation MCO $\hat{\beta}$ de β :

$$\log VA_i = 3.136 + 0.738 \log L_i + 0.282 \log K_i,$$

$$R^2 = 0.945$$

$$SCR = 148.27.$$

Nous donnons également

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0288 & 0.0012 & -0.0034 \\ 0.0012 & 0.0016 & -0.0010 \\ -0.0034 & -0.0010 & 0.0009 \end{pmatrix}$$

Calculer une estimation non biaisée s^2 de σ^2. En deduire une estimation de $Var(\hat{\beta})$. Rappeler la definition du R^2. En déduire la valeur de la variance empirique de la variable $\log VA$.

3) Donner un intervalle de confiance de niveau 95 % pour les paramètres α et λ.

4) Pour un seuil de 5 %, tester H0 : $\gamma = 0$ contre H1 : $\gamma > 0$.

5) Nous souhaitons tester l'hypothèse selon laquelle les rendements d'échelle sont constants. Nous rappelons qu'une fonction de production F est à rendements d'échelle constants si elle vérifie la relation $F(\mu L, \mu K) = \mu F(L, K)$, $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Quelle contrainte vérifient les paramètres du modèle lorsque les rendements d'échelle sont constants? Pour un seuil de 5%, réaliser le test
H0 : "rendements d'échelle constants" contre
H1 : "rendements d'échelle croissants".

6) Nous nous intéressons à la fonction de production dans trois secteurs :

T07 : minerais et métaux ferreux, première transformation de l'acier,
T15B : fabrication de biens d'équipement ménager,
T18 : industries textiles et habillement.

Les trois secteurs sont-ils régis par la même fonction de production ? Pour le savoir, nous avons estimé par la méthode MCO l'équation $\log VA = \alpha + \lambda \log L + \gamma \log K$ séparément sur chacun des trois secteurs, puis sur l'ensemble des entreprises :

T07 : $n = 40$ et $SCR = 2.57$,
T15B : $n = 24$ et $SCR = 1.17$,
T18 : n= 238 et $SCR = 17.8$,
Ensemble : $n = 302$ et $SCR = 41.12$.

Pour un seuil de 5 %, tester l'hypothèse selon laquelle la fonction de production est la même dans les trois secteurs.