TD DE MODÈLES LINÉAIRES I - SÉRIE 8

Exercice 1. On observe $X = (X_{ij}), 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 10$, X_{ij} de loi $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$ est la hauteur du jème arbre mesuré dans la forêt i.

	Forêt 1	Forêt 2	Forêt 3
	24.4	23.7	18.9
	24.6	24	21.1
	24.9	24.4	21.2
	25	24.5	22.1
	26.2	25.3	22.5
	26.3	26	23.5
	26.8	26.2	24.5
	26.8	26.4	24.6
	26.9	26.7	26.2
	27	26.9	26.7
$\sum_j X_{ij}$	258.9	254.1	231.3
$\sum_j X_{ij}^2$	6712.75	6469.29	5403.51

(1) Déterminer les ESBVM.

(2) Tester $H_0 : m_1 = m_2 = m_3$ contre H_1 au seuil $\alpha = 0.05$. Faire l'application numérique.

(3) On désire comparer les hauteurs moyennes dans chacune des forêts.

(a) Tester $H_0 : m_u = m_v$ contre $m_u \neq m_v$ au seuil α. Faire l'application numérique.

Donner des intervalles de confiance pour ces moyennes.

(b) Donner des intervalles de confiance de niveau $1 - \alpha$ simultanés pour les contrastes $m_u - m_v, 1 \leq u, v \leq 3$. Faire l'application numérique.

Exercice 2.

Partie A *But de cette partie : Quel est l'impact sur le Théorème de Gauss-Markov lorsque l'hypothèse d'homosédasticité n'est plus vérifiée?*

Soit $\{(Y_i, x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ un échantillon i.i.d. issu du modèle linéaire où $\forall i = 1, \cdots, n$, $Y_i \in$ I!R est appelée la variable aléatoire "réponse" et où les $x_i \in$ I!R^p sont supposés déterministes. Soit le modèle linéaire écrit sous sa forme matricielle :

$$Y = X\theta + \xi, \qquad \text{I!E}(\xi) = 0_n,$$

avec $\theta \in$ I!R^p, X une matrice $n \times p$ de rang p.

a) On suppose ici que $Var(\xi) = \sigma^2 I_n$, où I_n est la matrice identité $n \times n$ et $\sigma^2 > 0$. Rappeler et vérifier les Hypothèses (R) du cours et donner la forme maricielle de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$ ainsi que son espérance et sa variance. Enoncer le Théorème de Gauss-Markov.

b) On suppose maintenant que $Var(\xi) = \Omega$, où Ω connue est la matrice des covariances $n \times n$ symétrique, définie positive et de rang n . On veut savoir si le Théorème de Gauss-Markov est toujours vérifié dans ce cas. Calculer l'espérance et la variance de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\theta}$ lorsque $Var(\xi) = \Omega$. Conclure.

Partie B *But de cette partie : Réécrire un modèle linéaire où l'hypothèse d'homoscédasticité n'est pas vérif1 1ée en un modèle linéaire où l'hypothèse d'homoscédasticité est vérif11ée .*

Soit le modèle

$$Y = X\theta + \xi, \qquad \mathrm{I\!E}(\xi) = 0_n, \quad Var(\xi) = \Omega,$$

avec Ω connue est la matrice des covariances $n \times n$ symétrique, définie positive et de rang n. On veut réécrire le modèle sous la forme

$$Y^* = X^*\theta + \xi^*, \qquad \mathrm{I\!E}(\xi^*) = 0_n, \quad Var(\xi^*) = I_n,$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$. Pour cela, on rappelle que si A est une matrice $n \times n$ symétrique, définie positive et de rang n, alors il existe une matrice P inversible de rang n telle que $A = PP^T$.

a) Montrer qu'il existe une transformation ξ^* de ξ telle que $\mathrm{I\!E}(\xi^*) = 0_n$ et $Var(\xi^*) = I_n$, où I_n est la matrice identité $n \times n$.

b) En déduire que l'on peut ainsi réécrire le modèle hétéroscédastique sous la forme homoscédastique. Vous expliciterez Y^* et X^* en fonction de Y et X respectivement. Donner la forme matricielle de $\hat{\theta}^*$ l'estimateur des moindres carrés pour le modèle homoscédastique.

Partie C *But de cette partie : Trouver un estimateur $\hat{\theta}^G$ qui vérifie le Théorème de Gauss-Markov lorsque l'hypothèse d'homosédasticité n'est plus vérifiée .*

Introduisons $\hat{\theta}^G$ l'estimateur des moindres carrés généralisé calculé à partir du modèle hétéroscédastique et tel que

$$\hat{\theta}^G = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}Y.$$

a) Montrer que l'estimateur des moindres carrés généralisé $\hat{\theta}^G$ calculé dans le modèle hétéroscédastique correspond à l'estimateur des moindres carrés noté $\hat{\theta}^*$ calculé dans le modèle homoscédastique.

b) Montrer que l'estimateur des moindres carrés généralisé $\hat{\theta}^G$ défini pour le modèle hétéroscédastique est sans biais et de variance :

$$Var[\hat{\theta}^G] = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}.$$

c) Montrer que l'estimateur des moindres carrés généralisé $\hat{\theta}^G$ défini pour le modèle hétéroscédastique est de variance minimale au sens de Gauss-Markov.