UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE
Département LSO- DUGEAD
UV 44 - Statistiques II
Groupes 19

Contrôle continu n^o 1.

27-11-09. **Durée:1h20**

Rendre le sujet avec la copie

Calculatrices non-programmables autorisées. Téléphones portables interdits
Seul document autorisé: tables statistiques sans annotation

Un accident est survenu sur la chaîne de fabrication d'une crème de beauté (dont on ne s'est rendu compte que 2 semaines après) : une certaine proportion fixe $0 < \gamma < 1$ de pots contiennent une crème un peu trop granuleuse pour être appliquée avec plaisir sur la peau. Sachant que la chaîne produit $N \in \mathbb{N}$ pots par jour, le nombre de pots défectueux par jour vaut $k = \gamma N$. Durant la semaine les clients mécontents ont écrit pour se plaindre. Pour les 10 jours ouvrables les plaintes reçues ont été comptabilisées $(x_1, \dots, x_{10})$. On souhaite modéliser le nombre de plaintes reçues par jour.

I. Modélisation

1. Quelle est la population étudiée?
2. Quel est le caractère statistique étudié? On le notera X.
3. Montrer que les nombres $(x_1, \dots, x_{10})$ sont les réalisations d'un 10-échantillon $(X_1, \dots, X_{10})$ d'une loi binomiale $Bin(k, p)$ où p est le taux de plaintes (proportion de clients qui achetant un pot défectueux écrivent une plainte).

II. Cas où le nombre de pots défectueux est petit

Le lundi de la troisième semaine, le responsable décide de ne pas mettre en vente sa production afin de tester lui-même les pots. Il trouve ainsi $k = 2$ pots défectueux.

1. Montrer que pour tous les jours des semaines précédentes $i \in \{1, \dots, 10\}$ la variable X_i est égale (en loi) à la somme de 2 variables $(Y_{1,i}, Y_{2,i})$ indépendantes et identiquement distribuées (dont on précisera la loi), i.e.
$$X_i = Y_{1,i} + Y_{2,i}, \qquad \text{en loi.}$$
2. En déduire que $10\overline{X}_{10} \sim Bin(20, p)$.
3. Calculer explicitement $\mathbb{P}(\overline{X}_{10} \leq 30\%)$ en fonction de p.

4. En utilisant les tables statistiques, donner une valeur approcher de $\mathbb{P}(\overline{X}_{10} \leq 30\%)$ sachant qu'un cinquième des gens achetant un pot défectueux se plaint.

5. Sachant qu'un cinquième des gens achetant un pot défectueux se plaint, simuler, en explicitant la méthode étudiée, une réalisation de $(X_1, \ldots, X_{10})$ en utilisant les nombres aléatoires

   8717 6801 0856 0870 0946 7985 6508 1009 1768 3183.

   En déduire une réalisation de $\overline{X}_{10}$.

6. Par une autre méthode, simuler 3 réalisations indépendantes de $\overline{X}_{10}$ en utilisant les nombres aléatoires

   7496 2911 0235.

III. Cas où le nombre de pots défectueux est grand sachant qu'un cinquième des gens achetant un pot défectueux se plaint

On suppose désormais que le responsable trouve $k = 10$ pots défectueux lors du test le lundi de la troisième semaine.

1. Quelle est la loi suivie par $10\overline{X}_{10}$ dans ce cas?

2. Montrer qu'on a l'approximation $\overline{X}_{10} \sim \mathcal{N}(2, 2/5)$ et en déduire le calcul approximatif de $\mathbb{P}(\overline{X}_{10} \leq 30\%)$.

3. La production journalière est de $N = 100$ pots, tous étant vendus. Calculer γ.

4. Montrer que la proportion P sur 10 jours des clients (qu'ils aient acheté un pot défectueux ou non) qui envoient une plainte, i.e. $P = \overline{X}_{10}/N$, suit approximativement la loi $\mathcal{N}(\gamma/5, 2/(5 * N))$.

5. La direction a pour objectif que plus de $97,5\%$ de ses clients soient satisfaits de la crème hydratante (test réalisé sur 10 jours avec erreur de l'ordre de 1%) c'est à dire la proportion des clients qui envoient une plainte P est plus petit que $2,5\%$ avec une probabilité supérieure à 99%. Sachant qu'il serait trop coûteux de changer de machine, la proportion γ reste identique à la question précédente. Calculer le plus petit nombre N de pots à produire par jour afin d'atteindre l'objectif fixé par la direction.

IV. Cas où la proportion de gens qui se plaignent est inconnu

On suppose $k = 5$ et on considère désormais que seule une plainte a été reçue en 10 jours, la proportion p de gens qui se plaignent étant inconnue.

1. Rappeler la Loi des Grands Nombres appliquée au caractère étudié X.

2. (Bonus) En déduire une estimation de la proportion de gens qui se plaignent p à partir des observations $(x_1, \ldots, x_{10})$.

3. (Bonus) En supposant cette estimation valide, proposer une nouvelle approximation pour la loi de $10\overline{X}_{10}$.