Ecole Polytechnique — Année 2005-2006
March 22, 2006

Projet 7 : Modèle à volatilité stochastique

responsable: Olivier Wintenberger
(olivier.wintenberger@univ-paris1.fr)

On s'intéresse à l'évolution journalière d'un indice boursier. On note X_t le niveau de l'indice à la fin du jour (ouvrable) t et $Y_t = \log\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)$ son rendement géométrique entre t et $t+1$. Lorsqu'on observe ces rendements sur une assez longue durée on constate des périodes de forte agitation (volatilité élevée) et des périodes de faible agitation (volatilité faible). Voici par exemple la courbe de ces rendements pour l'indice américain Standard and Poors 500 entre le 2 janvier 1986 et le 12 mars 2003 :

Figure 1: Taux de rendement du S.&P. 500

Pour essayer de reproduire les caractéristiques de cette série on propose un modèle à volatilité stochastique défini par :

$$Y_t = \sigma_t \xi_t, \tag{1}$$

où $\sigma_t = \omega_0 + (\omega_1 - \omega_0)Z_t$; $\{\xi_t\}$ et $\{Z_t\}$ sont des processus indépendants; les ξ_t suivent indépendamment la loi $\mathcal{N}(0,1)$; Z_t est une chaîne de Markov homogène pouvant prendre les valeurs 0 et 1 et dont la dynamique est définie pour les paramètres $\pi_0 = \mathbb{P}(Z_t = 0 | Z_{t-1} = 0)$, $\pi_1 = \mathbb{P}(Z_t = 1 | Z_{t-1} = 1)$. On note $\theta = (\omega_0, \omega_1, \pi_0, \pi_1)'$.

Le paramètre θ est inconnu et on suppose $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_1 > \omega_0$, $0 < \pi_0 < 1$ et $0 < \pi_1 < 1$. L'état 0 correspond donc à une volatilité basse et l'état 1 à une volatilité haute. Les processus $\{Z_t\}$ et $\{\xi_t\}$ sont inobservables, seul le processus $\{Y_t\}$ est observable aux dates $t = 1, \ldots, T$. On suppose que la loi marginale de Z_1 est la loi invariante de la chaîne. On note $Y^t = (Y_1, \ldots, Y_t)$, $Z^t = (Z_1, \ldots, Z_t)$ et $\xi^t = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$.

1. Calculer la loi marginale de Z_1 en fonction de π_0 et π_1.

2. Donner l'expression de la densité conditionnelle $f(y_t/y^{t-1};z^t;\theta)$ et $p(z_t/y^{t-1};z^{t-1};\theta) = \mathbb{P}(Z_t = z_t/y^{t-1};z^{t-1};\theta)$.

3. Déduire de la question précédente la densité $f(y^T;z^T;\theta)$. Montrer que la vraisemblance peut, en principe, être calculée à partir de $f(y^T;z^T;\theta)$ mais que ce mode de calcul est en général inexploitable pratiquement.

4. On utilise le filtre d'Hamilton, détaillé dans le chapitre 12 du polycopié, pour calculer cette vraisemblance. Décrire les différentes étapes de cet algorithme.

5. Ecrire une procédure Scilab permettant le calcul de la vraisemblance et utilisant les routines "optim" et "NDcost" pour la maximiser. Nous fixons la valeur initiale de θ dans la routine d'optimisation à $(0.001, 0.01, 0.9, 0.9)'$. Fournir les écarts types asymptotiques des estimateurs ainsi obtenus.

6. Calculer les estimations des différentes probabilités de filtrage

$$p(z_t/y^t) = \mathbb{P}(Z_t = z_t/y^t), \qquad t = 1, \ldots, T$$

et tracer les graphes de ces probabilités. Proposez une reconstitution des états de basse et de haute volatilité.

7. Montrer que $p(z_t/z_{t+1}, y^T) = p(z_t/z_{t+1}, y^t)$. En déduire :

$$p(z_t, z_{t+1}/y^T) = \frac{p(z_{t+1}/y^T)p(z_{t+1}/z_t)p(z_t/y^t)}{p(z_{t+1}/y^t)}$$

et

$$p(z_t/y^T) = p(z_t/y^t) \sum_{z_{t+1}=0}^{1} \frac{p(z_{t+1}/y^T)p(z_{t+1}/z_t)}{p(z_{t+1}/y^t)}$$

8. Déduire de 7. un algorithme pour calculer récursivement les probabilités de lissages $p(z_t/y^T)$, $t = T, \ldots, 1$.

9. Ecrire un algorithme Scilab calculant ces probabilités.

10. Comparer les probabilités de lissages avec les probabilités de filtrages obtenues en 6. et comparer les reconstitutions des états fondées sur les deux types de probabilités.