Ecole Polytechnique — Année 2005-2006
June 13, 2006

Projet 8 : Modélisation du marché monétaire américain

responsable: Olivier Wintenberger
(olivier.wintenberger@univ-paris1.fr)

La dynamique du marché monétaire américain peut s'écrire grâce à la relation suivante :

$$DM1_t = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} OBL_{t-1} + \beta_{2,t} INF_{t-1} + \beta_{3,t} SUR_{t-1} + \beta_{4,t} DM1_{t-1} + \zeta_t. \tag{1}$$

- $DM1_t$ représente le taux d'accroissement $100 \log(M1_t/M1_{t-1})$ où $M1$ est la masse monétaire du pays ("M1 Money Supply").
- OBL_t correspond à l'accroissement $i_t - i_{t-1}$ des taux courts termes i_t ("Three Month Treasury Bill Yield").
- INF_t est le taux d'inflation $100 \log(CPI_t/CPI_{t-1})$ où CPI est l'indice américain des prix à la consommation ("Consumer Price Index").
- SUR_t correspond au surplus (ou déficit) du gouvernement fédéral en centaine de milliards de dollars ("Federal Government Surplus or Deficit").
- Enfin ζ_t est un bruit blanc gaussien : les ζ_t suivent indépendamment une loi $\mathcal{N}(0, \sigma_\zeta)$.

L'équation (1) formalise l'idée suivante : l'accroissement de la masse monétaire des États-Unis ($DM1_t$) répond à des besoins tendanciels et aux objectifs de la politique monétaire. Cette dernière vise en partie à assurer une stabilité de l'inflation (INF_{t-1}). Elle est principalement établie à l'aide d'un contrôle du taux d'intérêt (OBL_{t-1}) et doit s'ajuster en fonction de l'importance des besoins de financement de l'Etat (SUR_{t-1}) et de l'accroissement de la masse monétaire à la période précédente ($DM1_{t-1}$).

Les coefficients $\beta_{i,t}$, $i = 1, \dots, 4$, représentent les influences des différentes composantes macroéconomiques dans la régression (1). Ils sont susceptibles de dépendre de la situation économique américaine à l'instant t. Nous supposons dans la suite que ces coefficients et la tendance $\beta_{0,t}$ suivent des marches aléatoires :

$$\beta_{i,t} = \beta_{i,t-1} + \epsilon_{i,t} \text{ avec } \epsilon_{i,t} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_i^2) \text{ pour } i = 0, \ldots, 4. \tag{2}$$

On note β_t le vecteur $(\beta_{0,t}, \ldots, \beta_{4,t})'$. Les variables OBL_t, INF_t et SUR_t sont supposées exogènes. Le processus temporel $DM1_t$ a une représentation espace état soit, pour tout $1 \leq t \leq T$:

$$\begin{cases} \text{Equation d'état : } \beta_t = A_t \beta_{t-1} + \epsilon_t, \\ \text{Equation de mesure : } DM1_t = B_t \beta_t + \zeta_t. \end{cases}$$

Les matrices A_t et B_t valent :

$$A_t = Id_5, \text{ la matrice identité de taille 5 et}$$

$$B_t = (1, OBL_{t-1}, INF_{t-1}, SUR_{t-1}, DM1_{t-1}).$$

Les bruits ϵ_t et ζ_t représentent respectivement les aléas du processus d'état et les erreurs de mesures. Nous avons dans notre cas :

$$\epsilon_t = (\epsilon_{0,t}, \ldots, \epsilon_{4,t})'.$$

Les paramètres du modèle sont regroupés dans le vecteur :

$$\sigma^2 = (\sigma_\zeta^2, \sigma_0^2, \ldots, \sigma_4^2)'.$$

Notons $I_t = (DM1_0, \ldots, DM1_t)$, les observations passées de l'accroissement de la masse monétaire. La loi de prévision $\mathcal{L}(\beta_t | I_{t-1})$ est la loi conditionnelle de β_t sachant I_{t-1} tandis que la loi de filtrage est $\mathcal{L}(\beta_t | I_t)$. Le filtre de Kalman, détaillé dans le chapitre 12 du polycopié, est un algorithme itératif calculant récursivement ces deux lois, les paramètres du vecteur σ^2 étant fixés ainsi que la loi initiale de β_t : $\beta_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 50 * Id_5)$.

1. Donner la densité de probabilité des ϵ_t en fonction de σ^2.

2. Supposons que la loi de prévision est donnée par $\mathcal{N}(\beta_{t/t-1}, \Sigma_{t/t-1})$ avec $\beta_{t/t-1} = \mathbb{E}(\beta_t | I_{t-1})$ et $\Sigma_{t/t-1} = \text{Var}\,(\beta_t | I_{t-1})$. Calculer la loi $\mathcal{L}(DM1_t, \beta_t | I_{t-1})$ en fonction de σ^2, $\beta_{t/t-1}$ et $\Sigma_{t/t-1}$, ainsi que des indices OBL_{t-1}, INF_{t-1}, SUR_{t-1}, $DM1_{t-1}$. Montrer en particulier que cette loi conditionnelle est une loi normale.

3. D'après la question précédente, expliciter la variance conditionnelle de $DM1_t$ sachant I_{t-1}, notée $V_{t/t-1}$, en fonction de σ^2 et $\Sigma_{t/t-1}$ ainsi que des indices OBL_{t-1}, INF_{t-1}, SUR_{t-1}, $DM1_{t-1}$. En déduire l'expression de la densité de probabilité de $DM1_t$ sachant I_{t-1} en fonction de $V_{t/t-1}$, $\beta_{t/t-1}$, ainsi que des indices OBL_{t-1}, INF_{t-1}, SUR_{t-1}, $DM1_{t-1}$.

4. En utilisant le résultat de la question 2, calculer la loi de filtrage en fonction de σ^2, $\beta_{t/t-1}$ et $\Sigma_{t/t-1}$, ainsi que des indices OBL_{t-1}, INF_{t-1}, SUR_{t-1}, $DM1_{t-1}$. Montrer en particulier que cette loi conditionnelle est une loi normale.

5. Le filtre de Kalman reprend les résultats des trois questions précédentes pour calculer les filtrages $\beta_{t/t}$ et leur matrice de variance $\Sigma_{t/t}$ en fonction des prévisions $\beta_{t/t-1}$ et de leur matrice de variance $\Sigma_{t/t-1}$. Puis il calcule les prévisions du pas suivant $\beta_{t+1/t}$ et leur matrice de variance $\Sigma_{t+1/t}$ en fonction des filtrages $\beta_{t/t}$ et de leur matrice de variance $\Sigma_{t/t}$. Rappeler le principe en 5 étapes de ce filtre. Montrer que l'hypothèse de normalité conditionnelle faite dans la question 2 est toujours satisfaite.

6. D'après la question 3, donner l'expression de la log-vraisemblance des accroissements de la masse monétaire $DM1_1, \ldots, DM1_T$ (conditionnellement à $DM1_0$) en fonction de $V_{t/t-1}$, $\beta_{t/t-1}$, ainsi que des indices OBL_{t-1}, INF_{t-1}, SUR_{t-1}, $DM1_{t-1}$.

7. Implémenter sous Scilab une méthode utilisant le filtre de Kalman et permettant le calcul de la log-vraisemblance des accroissements de la masse monétaire $DM1_1, \ldots, DM1_T$ (conditionnellement à $DM1_0$) en fonction de la valeur de σ^2.

8. En utilisant les routines "optim" et "NDcost", trouver numériquement le vecteur $\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}^2_\zeta, \hat{\sigma}^2_0, \ldots, \hat{\sigma}^2_4)'$ qui maximise la log-vraisemblance des $DM1_1, \ldots, DM1_T$ (conditionnellement à $DM1_0$). Nous fixons la valeur initiale de σ^2 dans la routine d'optimisation à
$$(0.5^2, 0.1^2, 0.1^2, 0.1^2, 0.1^2, 0.1^2)'.$$
Fournir les écarts types asymptotiques des estimateurs ainsi obtenus.

9. Utiliser de nouveau le filtre de Kalman pour calculer les valeurs des prévisions $\beta_{t/t-1}$ et $\Sigma_{t/t-1}$ et des filtrages $\beta_{t/t}$ et leur matrice de variance $\Sigma_{t/t}$ les paramètres étant fixés à $\hat{\sigma}^2$.

10. Tracer la courbe suivie par la variance des coefficients filtrés du troisième trimestre de l'année 1960 au troisième trimestre 2004 ainsi que la prévision en $t-1$ de $DM1_t$ et sa variance conditionnelle sachant I_{t-1}.